Tema 3. Dinámica del sólido rígido

Segunda parte: Movimiento general

1. Grados de libertad

- Ahora tenemos seis grados de libertad, tres para la posición del centro de masa, y tres para la rotación alrededor del centro de masa.

2. Eje instantáneo de rotación

- Consideramos sólo el caso de un sólido con un punto fijo E, cuya posición dentro del sólido puede cambiar en el tiempo. En tal caso, la velocidad de un punto arbitrario P del sólido es

$$\boxed{\vec{V}_P = \vec{w} \times \overrightarrow{EP}}$$

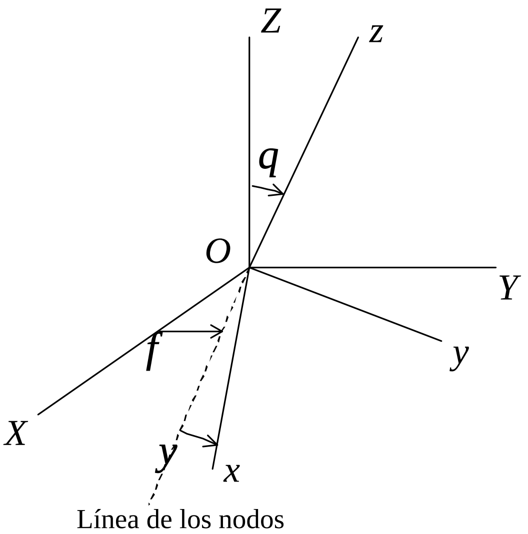
Se comprueba así que aquellos puntos P que se encuentran en la recta paralela al vector velocidad angular $\vec{w}$ que pasa por E están en reposo también en ese instante de tiempo. Es decir, esa recta es el conjunto de puntos del sólido que se encuentran en reposo simultáneamente en dicho instante. Esa recta forma el **eje instantáneo de rotación**, efectuando el sólido un movimiento de rotación, sin traslación, en torno a ese eje.

- Cuando no existe tal punto E, el movimiento general del sólido es combinación de un movimiento de traslación en dirección paralela a un determinado eje, y un movimiento de rotación en torno a dicho eje.

3. Ángulos de Euler

- La posición del sólido con un punto fijo E queda determinada definiendo un conjunto de tres ángulos de rotación independientes. El conjunto más utilizado lo forman los llamados ángulos de Euler, que pasamos a definir. Sea $OXYZ$ un sistema de referencia fijo, y $Oxyz$ un sistema de referencia ligado al sólido, que comparte el mismo origen con el sistema anterior. Dicho origen se sitúa en el punto fijo E. Giramos un ángulo f en torno al eje OZ, y dibujamos la llamada línea de los nodos en el plano XY. Los ángulos de Euler quedan definidos como sigue:

f es el ángulo entre el eje OX y la línea de los nodos (arbitraria)
q es el ángulo entre el eje fijo OZ y el eje móvil Oz
y es el ángulo entre la línea de los nodos y el eje Ox, en el plano xy



- Los rangos de variación de los ángulos de Euler son

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \le \phi < 2\pi \\ 0 \le \theta < \pi \\ 0 \le \psi < 2\pi \end{array}}$$

4. Velocidad angular en función de los ángulos de Euler

- Las velocidades angulares asociadas a los ángulos de Euler reciben los nombres de **precesión** ($\dot{\phi}$), **nutación** ($\dot{\theta}$) y **espín** ($\dot{\psi}$).

- Sea $\vec{u}_n$ el vector unitario en la dirección de la línea de los nodos. La velocidad angular del sólido tiene la expresión directa

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{u}_Z - \dot{\theta}\vec{u}_n + \dot{\psi}\vec{u}_z}$$

Es más útil escribir el vector velocidad angular tomando como referencia los ejes fijos del sólido, que están definidos en virtud de su simetría espacial. Escribiendo los vectores unitarios anteriores en función de los vectores unitarios según los ejes fijos en el sólido,

$$\vec{u}_Z = \cos\theta\ \vec{u}_z - \sin\theta \sin\psi\ \vec{u}_x - \sin\theta \cos\psi\ \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_n = \cos\psi\ \vec{u}_x - \sin\psi\ \vec{u}_y$$

obtenemos las componentes del vector velocidad angular en la forma

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega_x = -\dot{\phi} \sin\theta \sin\psi - \dot{\theta} \cos\psi \\ \omega_y = -\dot{\phi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} \sin\psi \\ \omega_z = \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi} \end{array}}$$

5. Matriz de inercia. Ejes principales. Momento angular

- Se define la matriz de inercia I como la matriz que tiene las componentes

$$\boxed{I_{ij} = \int \left(r^2 d_{ij} - x_i x_j \right) r\, dV}$$

donde r es la densidad de masa del sólido, r la distancia del elemento de masa arbitrario del sólido $dm = r\, dV$ al eje de giro, $\{x_i\}$ las coordenadas cartesianas del vector $\vec{r}$ para ese elemento de masa, y

$$d_{ij} = \begin{Bmatrix} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{Bmatrix}$$

- El momento angular $\vec{L}$ de un sólido rígido arbitrario tiene las componentes

$$\boxed{L_i = \sum_{j=x,y,z} I_{ij} w_j}$$

A partir de ahora, será mas conveniente renombrar los ejes del sólido con los números 1,2,3 en lugar de las letras x,y,z. Así, las componentes del momento angular pueden escribirse en la forma

$$\boxed{\begin{aligned} L_1 &= I_{11} w_1 + I_{12} w_2 + I_{13} w_3 \\ L_2 &= I_{21} w_1 + I_{22} w_2 + I_{23} w_3 \\ L_3 &= I_{31} w_1 + I_{32} w_2 + I_{33} w_3 \end{aligned}}$$

- Una de las propiedades fundamentales que nos permite describir el movimiento de cualquier sólido rígido de forma sencilla es consecuencia del carácter matricial del momento de inercia. En virtud de su propiedad de simetría, $I_{ij} = I_{ji}$, siempre nos será posible encontrar un sistema de ejes dentro del sólido, llamados **ejes principales**, tales que la matriz del momento de inercia sea diagonal, en la forma $I_{ij} = diag\left(I_1, I_2, I_3 \right)$, siendo I_i los llamados momentos principales de inercia. Tomando como referencia estos ejes destacados, el cálculo se simplifica puesto que las componentes del momento angular sólo dependen de la componente en la misma dirección de la velocidad angular,

$$\boxed{\begin{aligned} L_1 &= I_1 w_1 \\ L_2 &= I_2 w_2 \\ L_3 &= I_3 w_3 \end{aligned}}$$

En general, los ejes principales coinciden con los ejes de simetría del sólido, y se identifican con los ejes xyz fijos al sólido, mencionados anteriormente, respecto a los cuales deben definirse los ángulos de Euler.

6. Energía cinética

- Tomando como referencia los ejes principales centrados en el punto fijo del sólido, la energía cinética tiene la expresión

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} I_1 w_1^2 + \frac{1}{2} I_2 w_2^2 + \frac{1}{2} I_3 w_3^2}$$

7. Ecuaciones del movimiento

- Tomando como referencia unos ejes fijos en el espacio, la ecuación para el movimiento de rotación del sólido rígido respecto a un eje que pasa por su punto fijo, es

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

siendo $\vec{M}$ el momento de las fuerzas exteriores, y $\vec{L}$ el momento angular de giro medido en el sistema de ejes fijo en el espacio.

- Si nos referimos a los ejes principales del sólido la ecuación del movimiento es

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{w} \times \vec{L}}$$

que se denomina **ecuación de Euler**, siendo $\vec{L}$ el momento angular de giro medido en el sistema de ejes fijo en el sólido

$$\vec{L} = I_1 w_1 \vec{u}_1 + I_2 w_2 \vec{u}_2 + I_3 w_3 \vec{u}_3$$

y $\vec{w}$ el vector velocidad angular, medido en el sistema de ejes fijo en el sólido

$$\vec{w} = w_1 \vec{u}_1 + w_2 \vec{u}_2 + w_3 \vec{u}_3$$

- Por tanto, por componentes, la ecuación de Euler se escribe

$$\boxed{\begin{aligned} M_1 &= I_1 \frac{dw_1}{dt} + \left(I_3 - I_2\right) w_2 w_3 \\ M_2 &= I_2 \frac{dw_2}{dt} + \left(I_1 - I_3\right) w_3 w_1 \\ M_3 &= I_3 \frac{dw_3}{dt} + \left(I_2 - I_1\right) w_1 w_2 \end{aligned}}$$

y su solución conjunta nos da la evolución temporal de las componentes de la velocidad angular, respecto a los ejes principales del sólido.

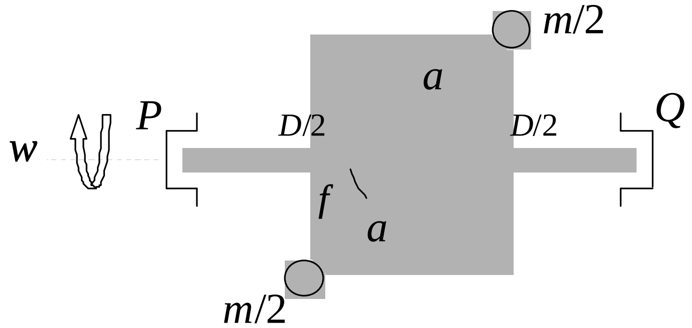
8. Utilidad de la ecuación de Euler

a) Para el estudio de **sistemas no equilibrados**, sistemas que no se mantienen en equilibrio al realizar un movimiento de rotación debido a que el vector velocidad angular de giro no está dirigido según un eje principal. Por efecto de esta falta de simetría, aparecen momentos de fuerza que tienden a desequilibrar el sistema, y por tanto, será necesario aplicar un par de fuerzas $\vec{M}$ que elimine la descompensación del sistema. En otros casos, se puede realizar una labor de equilibrado variando los momentos de inercia del cuerpo en rotación hasta obtener el estado de equilibrio deseado.
En general, el problema se simplifica considerando que la velocidad angular de rotación es constante. Con ayuda de las ecuaciones de Euler, calculamos partiendo del valor conocido de la velocidad angular $\vec{w}$, el par $\vec{M}$ creado. Elegimos los ejes 123 como los ejes principales del sistema.

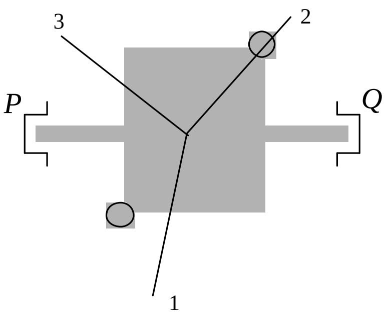
b) Para el estudio de **sistemas giroscópicos**. En este caso, se conoce de antemano el par $\vec{M}$ que se aplica al sólido, y se desea obtener las velocidades de rotación del sistema en función de los ángulos de Euler, para casos especiales. Con esta información, es posible describir de forma completa el movimiento del sistema giroscópico. Para resolver el problema, debemos utilizar la relación entre las componentes $1,2,3$ de la velocidad angular y los ángulos de Euler.

Problemas Resueltos

3.13 Un árbol de longitud L está apoyado en dos cojinetes P y Q, y lleva colocadas asimétricamente dos masas, iguales a $m/2$ a una distancia a del eje del árbol, formando con él un ángulo f. El conjunto gira con velocidad angular constante $\vec{w}$. Calcular la fuerza necesaria que hay que aplicar sobre los cojinetes para mantener el movimiento.



- Los ejes principales del sólido coinciden con sus ejes de simetría, que se definen como se muestra en la figura.



El eje 1 es perpendicular al plano formado el brazo y el eje central del árbol. Contenidos en ese mismo plano, el eje 3 es perpendicular al brazo donde se encuentran las masas, y el eje 2 está dirigido a lo largo de los brazos del árbol.

- Los momentos principales de inercia corresponden a los momentos de inercia de masas puntuales, y son

$$I_1 = 2\frac{m}{2}a^2 = ma^2$$
$$I_2 = 0$$
$$I_3 = I_1 = ma^2$$

y el vector velocidad angular viene dado, en el sistema de ejes principales, por

$$\vec{w} = w_1\vec{u}_1 + w_2\vec{u}_2 + w_3\vec{u}_3$$
$$w_1 = 0$$
$$w_2 = -w\cos f$$
$$w_3 = w\sin f$$

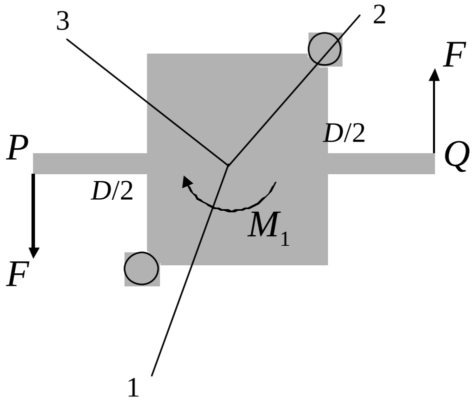
- Las ecuaciones de Euler, suponiendo que la velocidad angular de giro del árbol es constante, se escriben

$$M_1 = (I_3 - I_2)w_2w_3$$
$$M_2 = (I_1 - I_3)w_3w_1$$
$$M_3 = (I_2 - I_1)w_1w_2$$

En nuestro caso, con los datos anteriores, el momento de fuerzas que sufre el árbol debido a su movimiento de rotación no equilibrado (ya que el vector velocidad angular no está dirigido según un eje principal) tiene las componentes

$$M_1 = (I_3 - I_2)w_2w_3 = -ma^2w^2\sin f\cos f$$
$$M_2 = (I_1 - I_3)w_3w_1 = 0$$
$$M_3 = (I_2 - I_1)w_1w_2 = 0$$

- Las fuerzas aplicadas F en los puntos P y Q deben generar un par de fuerzas que anule este momento no nulo $M_1 < 0$.

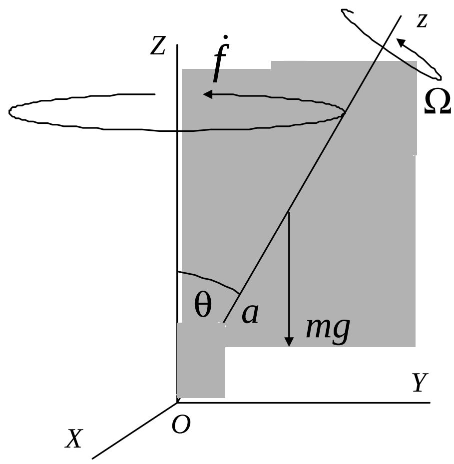


Deben estar dirigidas en sentido contrario a las agujas del reloj y ser tales que

$$2F\frac{D}{2} = |M_1|$$

$$F = m\frac{a^2}{D}w^2 \sin f \cos f$$

3.14 Calcular la velocidad de precesión en torno al eje vertical de un trompo pesado que gira sobre sí mismo con velocidad Ω, mucho mayor que $\dot{f}$.



- Ya que $\Omega \gg \dot{f}$, el momento angular del sistema es prácticamente igual al momento angular respecto al eje z de simetría, debido a la rotación del trompo sobre sí mismo. Entonces,

$$\vec{L} = I_3\Omega\,\vec{u}_z$$

Sin embargo, la variación temporal del vector $\vec{L}$ se debe, ya que Ω es constante, a la precesión del eje z del cuerpo en torno al eje vertical Z con velocidad angular $\dot{f}$. Se debe cumplir

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{f}\ \vec{u}_Z \times \vec{L} = \dot{f} I_3\Omega\ \vec{u}_Z \times \vec{u}_z = \dot{f} I_3 \Omega \sin q\ \vec{u}_x$$

siendo $\vec{M}$ el momento de las fuerzas exteriores (el peso del trompo) respecto al punto fijo del trompo

$$\vec{M} = \vec{r} \times mg(-\vec{u}_Z) = -mga\ \vec{u}_z \times \vec{u}_Z = mga \sin q\ \vec{u}_x$$

siendo a la distancia medida sobre el eje del trompo desde el punto fijo hasta el centro de masa.

- Igualando las dos ecuaciones, obtenemos la precesión del eje del trompo respecto a la vertical

$$\dot{f} = \frac{mga}{I_3\Omega}$$

3.15 Establecer las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido simétrico con respecto a un eje, tiene un punto fijo sobre ese eje. Discutir el movimiento rotacional del cuerpo, suponiendo que no existen fuerzas externas.

- Escogemos el eje de simetría como eje principal. Las ecuaciones de Euler para un cuerpo simétrico, tal que $I_1 = I_2$, en ausencia de fuerzas externas, son

$$I_2 \frac{dw_1}{dt} + \left(I_3 - I_2\right) w_2 w_3 = 0$$

$$I_2 \frac{dw_2}{dt} + \left(I_2 - I_3\right) w_3 w_1 = 0$$

$$I_3 \frac{dw_3}{dt} = 0$$

- La tercera ecuación nos dice que w_3 es una constante del movimiento

$$w_3 = C$$

Introduciendo este resultado en las ecuaciones restantes, obtenemos

$$I_2 \frac{dw_1}{dt} + \left(I_3 - I_2\right) w_2 C = 0$$

$$I_2 \frac{dw_2}{dt} + \left(I_2 - I_3\right) w_1 C = 0$$

- De aquí, podemos extraer las ecuaciones del movimiento para cada una de las componentes de la velocidad angular en la forma

$$I_2^2 \frac{d^2 w_1}{dt^2} + \left(I_3 - I_2\right)^2 C^2 w_1 = 0$$

$$I_2^2 \frac{d^2 w_2}{dt^2} + \left(I_3 - I_2\right)^2 C^2 w_2 = 0$$

con la solución conjunta general

$$w_1 = A\cos\Omega t$$

$$w_2 = A\sin\Omega t$$

siendo

$$\Omega = \left|\frac{I_3 - I_2}{I_2}\right| C$$

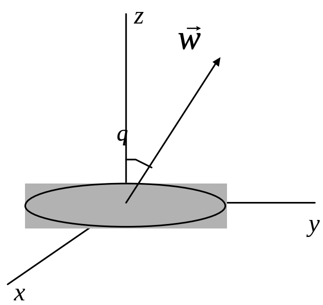
- Concluimos entonces que el vector de velocidad angular $\vec{w}$ tiene una magnitud constante

$$w = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} = \sqrt{A^2 + C^2}$$

y que precesa en torno al eje 3 con una velocidad angular Ω. El ángulo a formado por el vector de velocidad angular y el eje 3 el cuerpo satisface

$$\cos a = \frac{w_3}{w} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + C^2}}$$

3.16 Calcular el momento de fuerza necesario para que el disco de radio a y masa m, gire con velocidad angular constante w, en una dirección que forma un ángulo q constante con el eje vertical. Calcular la precesión respecto al eje vertical.



- Elegimos los ejes (xyz) como los ejes principales del disco, de forma que el vector $\vec{w}$ esté contenido siempre en el plano yz. La velocidad angular del sistema es, incluyendo la precesión en torno al eje vertical,

$$\vec{w} = w\sin q\ \vec{u}_2 + \left(w\cos q + \dot{f}\right)\vec{u}_3$$

- El momento de inercia del disco respecto del eje vertical es

$$I_3 = \frac{1}{2} m a^2$$

y utilizando el teorema de ejes perpendiculares para un cuerpo sólido plano

$$I_3 = I_1 + I_2$$

obtenemos por simetría, los otros dos momentos de inercia

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_3 = \frac{1}{4} m a^2$$

- Con ayuda de las ecuaciones de Euler, obtenemos el momento de fuerza necesario para mantener el movimiento del disco

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left(I_3 - I_2\right) w_2 w_3 = \frac{1}{4} m a^2 w \sin q \left(w \cos q + \dot{f}\right) \\
M_2 &= \left(I_1 - I_3\right) w_3 w_1 = 0 \\
M_3 &= \left(I_2 - I_1\right) w_1 w_2 = 0
\end{aligned}$$

- El momento angular del sistema viene dado por

$$\begin{aligned}
L_1 &= 0 \\
L_2 &= \frac{1}{4} m a^2 w \sin q \\
L_3 &= \frac{1}{2} m a^2 \left(w \cos q + \dot{f}\right)
\end{aligned}$$

y además es constante sobre los ejes móviles del disco (recordar que la velocidad angular se encuentra siempre en el plano yz, pero dicho plano precesiona respecto a la vertical con velocidad angular $\dot{f}$) . La variación temporal de $\vec{L}$ se debe, pues, a la precesión respecto al eje vertical. Se cumple entonces

$$\vec{M} = \dot{f}\, \vec{u}_3 \times \vec{L}$$

ecuación referida a los ejes móviles. La única componente no nula del momento de fuerzas $M_1 = -\dot{f} L_2$ nos da la condición que debe satisfacer la precesión

$$\frac{1}{4} m a^2 w \sin q \left(w \cos q + \dot{f}\right) = -\frac{1}{4} m a^2 w \sin q \dot{f}$$

con la solución

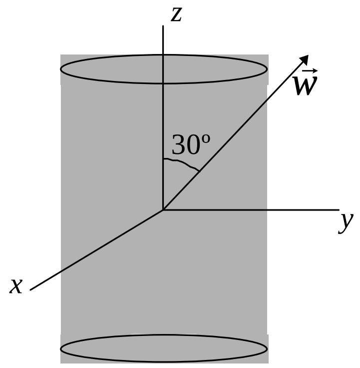
$$\dot{f} = -\frac{1}{2} w \cos q$$

y de aquí, el momento de fuerzas necesario para mantener el movimiento se reduce a

$$M_1 = \frac{1}{4} m a^2 w \sin q \left(w \cos q + \dot{f}\right) = \frac{1}{8} m a^2 w^2 \sin q \cos q$$

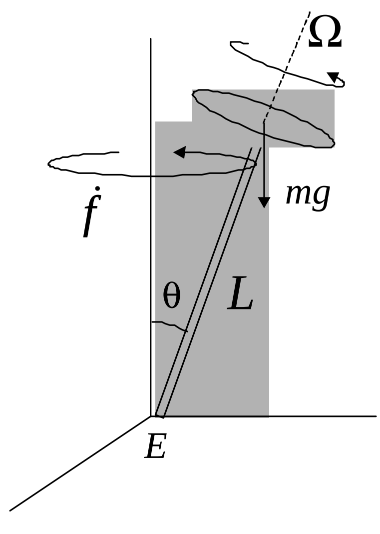
Problemas Propuestos

3.17 **Un cilindro homogéneo de masa m, radio R y altura H gira en torno a un eje que forma un ángulo de 30º con el eje del cilindro y que pasa por su centro de masa. Calcular el momento de fuerzas que se debe aplicar en el soporte del cilindro para mantener el movimiento.**



Solución: $M_1 = \frac{\sqrt{3}}{48} m w^2 \left(3R^2 - H^2\right), M_2 = 0, M_3 = 0$

3.18 **Una barra de longitud L y masa despreciable, se une a un disco de masa m y radio a. El conjunto gira respecto al punto fijo de contacto E. El disco gira respecto a sí mismo con velocidad angular Ω. Calcular la precesión $\dot{f}$ del sistema respecto al eje vertical, suponiendo que no hay nutación (q permanece constante), que $\Omega \gg \dot{f}$ y que $L \gg a$.**



Solución: $\dot{f} = -\frac{g}{L\Omega}$