Tema 4. Relatividad especial

Segunda parte: Cinemática relativista

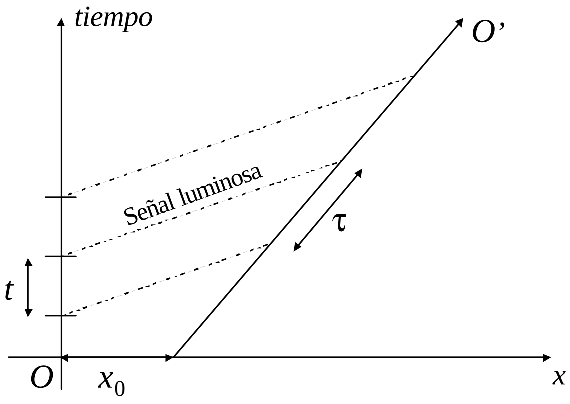
1. Principio de relatividad especial

• Como nos demuestra nuestra experiencia física, todos los observadores inerciales deben ser equivalentes, no sólo respecto a la dinámica, como ya descubrió Newton, sino también respecto a la propagación de la luz. Esto implica que *la velocidad de la luz debe ser la misma* en todas direcciones, *independientemente del estado de movimiento del observador*, probado que sea un observador inercial. Y esto nos lleva ineludiblemente al **principio de relatividad de Einstein**: todos los observadores inerciales son físicamente equivalentes, así que no puede realizarse ningún experimento físico que discrimine de alguna forma los observadores inerciales entre sí.

• Una de las consecuencias del principio de relatividad es que el tiempo deja de ser un concepto absoluto, ya que cada observador mide su tiempo propio. La experiencia diaria nos muestra que dos relojes sincronizados siempre marcarán el mismo tiempo, sea cual sea su movimiento relativo. Pero esta experiencia está adquirida en un contexto muy reducido, cuando la velocidad relativa es pequeña frente a la velocidad de la luz. Mantener que esta sincronización se produce incluso a velocidades relativas cercanas a la velocidad de la luz va en contra del principio de la constancia de la velocidad de la luz. Por tanto, el tiempo es una cantidad relativa, que depende del camino recorrido por el observador.

2. Proporcionalidad entre intervalos de tiempo

• Consideramos los dos observadores inerciales mostrados en la figura. Uno de ellos, O, se encuentra en reposo en la posición $x=0$ en todo instante de tiempo. El otro, O', se mueve con velocidad constante V a lo largo del eje x, y su posición medida por el observador O es $x = x_0 + Vt$.



- Debido a la uniformidad del movimiento entre los dos observadores inerciales y de la constancia de la velocidad de la luz, si uno de ellos emite señales luminosas a intervalos de tiempo t, el otro observador recibirá las señales a intervalos de tiempo τ medidos en su propio sistema de referencia, como muestra la figura. De esta manera se cumple la llamada **proporcionalidad entre intervalos**

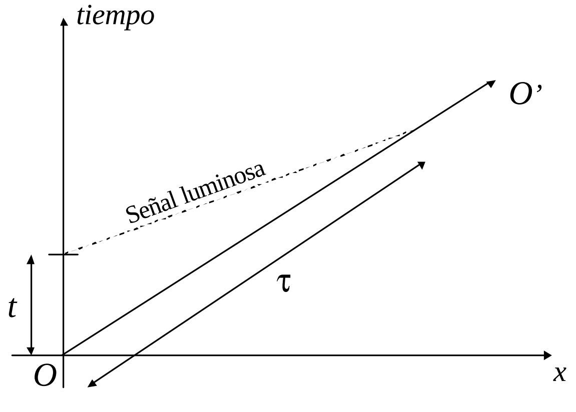
$$\boxed{t = Kt}$$

donde K es una constante que depende sólo de la velocidad relativa entre los dos observadores, y no de su posición relativa. Si la proporción es igual a la unidad, ambos observadores están en reposo relativo. Si es mayor que la unidad, los observadores se alejan entre sí, y si es menor que la unidad, los observadores se acercan entre sí. Además, si el observador en movimiento cambia el sentido de su movimiento, la nueva constante de proporcionalidad será

$$\boxed{K' = \frac{1}{K}}$$

Así, se comprueba que la propagación de la luz es muy diferente de la propagación del sonido, que tenía en cuenta la velocidad del transmisor y del receptor (efecto Doppler no relativista). En este tema, la teoría de la relatividad se va a desarrollar partiendo del principio de relatividad y de la proporcionalidad de intervalos temporales, ya que nos aporta una visión más física que el desarrollo formal de la relatividad especial a partir de las fórmulas de transformación de Lorentz.

- La utilidad de la proporcionalidad de intervalos radica en lo siguiente. En los ejemplos prácticos tratados en relatividad, sólo es posible sincronizar los relojes de dos observadores en movimiento relativo en el instante que ambos observadores se encuentren en el mismo punto del espacio, que tomaremos como origen de coordenadas. Así, según muestra la figura, la proporcionalidad de los intervalos de tiempo t y τ



es equivalente a la proporcionalidad entre el instante de emisión t de una señal medido por un observador inercial O, y el instante de recepción τ de esa señal por otro observador inercial O', medido por ese observador O'. A partir de aquí, utilizamos el concepto de la proporcionalidad de intervalos en este sentido.

3. Transformación de Lorentz

- Un **suceso relativista** se define como un acontecimiento que en el espacio-tiempo tiene una coordenada espacial y una coordenada temporal (se supone que el movimiento se restringe a una dimensión).

- La **transformación de Lorentz** es el conjunto de fórmulas que define la relación entre las coordenadas (x, t) de un suceso relativista medidas por un observador O en reposo, y las coordenadas (x', t') medidas por un observador O' en movimiento uniforme con velocidad V. Se escriben en la forma

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= g\,(x - Vt) \\ t' &= g\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \end{aligned}}$$

donde hemos introducido el factor γ definido por

$$\boxed{g = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} > 1}$$

- Para obtener la relación inversa basta sustituir las coordenadas primadas por las coordenadas sin prima y cambiar de signo a la velocidad relativa, ya que el observador en reposo se mueve con velocidad $-V$ respecto al observador en movimiento.

4. Contracción de la longitud

- Una de las consecuencias del carácter relativo del tiempo es la **contracción de la longitud**. La distancia medida por un observador en reposo depende del estado de movimiento del objeto medido. En particular, la distancia medida decrece al aumentar la velocidad del objeto. Este fenómeno puede estudiarse directamente a partir de la transformación de Lorentz.

- Imaginemos el movimiento uniforme con velocidad V de una barra homogénea. Cualquier observador unido a la barra mide una longitud propia L_0. Calculamos la longitud L de la barra medida por el observador O en reposo. Tomando incrementos en la transformación de Lorentz, obtenemos

$$\Delta x' = g\,(\Delta x - V\,\Delta t)$$

Ahora tenemos que identificar el significado de $\Delta x', \Delta x, \Delta t$ recordando la noción de suceso relativista. Así, $\Delta x'$ será la separación espacial de dos sucesos relativistas cualesquiera que sirvan para medir la longitud de la barra desde el punto de vista del observador ligado a la barra. Por ejemplo, se pueden enviar sendas señales a los extremos de la barra, y medir el tiempo de retorno. Obviamente, $\Delta x' = L_0$. De forma análoga, $\Delta x = L$.

- Además Δt será la diferencia de tiempo entre los sucesos relativistas anteriores desde el punto de vista del observador en reposo. Es fácil ver que $\Delta t = 0$ puesto que el observador en reposo conoce exactamente la longitud de la barra cuando recibe simultáneamente las señales desde sus puntos extremos. Por tanto, hemos establecido que la longitud vista por el observador en reposo satisface

$$L_0 = \gamma L$$

En general, se establece este fenómeno en su significado inverso

$$\boxed{L = \frac{1}{\gamma} L_0 < L_0}$$

Es decir, *un observador en reposo siempre mide una longitud menor que la longitud medida por el observador en movimiento (ligado a la barra).*

5. Dilatación del tiempo

- De forma análoga, el movimiento del observador produce una variación en el tiempo medido. De nuevo, este fenómeno puede explicarse partiendo de la transformación de Lorentz

$$t' = \gamma \left(t - \frac{Vx}{c^2} \right)$$

Para ello, necesitamos precisar un poco más la noción de tiempo, subrayando el carácter intrínseco que tiene para cada observador individual. Hablamos de **tiempo propio de un observador** como el tiempo medido para sucesos que ocurren en su sistema de referencia, respecto a los cuales el observador está en reposo. Relacionamos así el tiempo propio τ medido por el observador en movimiento con el tiempo propio t medido por el observador en reposo.

- En la fórmula anterior, t' corresponde al tiempo propio τ del observador en movimiento si los sucesos ocurren en su sistema de referencia. Respecto al observador en reposo, la posición de ese sistema de referencia del observador en movimiento satisface $x = Vt$. Por tanto, $t' = \tau$ si $x = Vt$. Entonces, la relación entre los tiempos propios queda establecida en la forma

$$\tau = \gamma \left(t - \frac{V^2}{c^2} t \right) = \gamma \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) t$$

Introduciendo el valor del factor γ, obtenemos

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\gamma} t < t}$$

Es la **dilatación del tiempo**: *para un observador en movimiento, el tiempo transcurre más lentamente que para un observador en reposo.*

6. Adición relativista de velocidades

• Este resultado es el análogo relativista al teorema de Galileo de adición de velocidades, en la forma $\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}' + \vec{V}$. Para ello, imaginamos el movimiento uniforme de un móvil cuyas coordenadas espacio-temporales sean (x, t) medidas por un observador O en reposo, y (x', t') medidas por un observador O' en movimiento uniforme con velocidad V. Por tanto, la velocidad (uniforme) del móvil respecto a ambos observadores será

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{v}' = \dfrac{x'}{t'} \\ \mathrm{v} = \dfrac{x}{t} \end{array}}$$

• Ya que ambos observadores tienen un movimiento relativo uniforme, las coordenadas espacio-temporales medidas respecto a ellos están relacionadas por la transformación de Lorentz. Haciendo uso de ella, podemos obtener el resultado

$$\mathrm{v}' = \frac{x'}{t'} = \frac{g\,(x - Vt)}{g\left(t - \dfrac{Vx}{c^2}\right)} = \frac{x - Vt}{t - \dfrac{Vx}{c^2}}$$

Dividendo numerador y denominador por t, e introduciendo la velocidad del móvil respecto al observador en reposo, obtenemos el teorema de **adición relativista de velocidades**

$$\boxed{\mathrm{v}' = \frac{\mathrm{v} - V}{1 - \dfrac{V\mathrm{v}}{c^2}}}$$

que coincide con el resultado no relativista si las velocidades son mucho menores que la velocidad de la luz.

7. Sucesos propios e impropios

• Un **suceso propio** es el suceso relativista cuyas coordenadas espacio-temporales para dos observadores en movimiento relativo uniforme están relacionadas mediante la transformación de Lorentz. Son los sucesos para los cuales no han variado las condiciones externas desde su comienzo hasta su finalización. En particular, son sucesos propios todos los sucesos instantáneos, que duran un solo instante de tiempo (salida de una nave, emisión de una señal).

• Un **suceso impropio** es el suceso relativista para el cual han variado las condiciones externas desde su comienzo hasta su finalización. Por ejemplo, la emisión desde la Tierra de una señal a una nave en movimiento y su recepción por la nave. La nave no se encuentra en la misma posición en el instante de emisión que en el instante de recepción. Esto implica que las condiciones externas han cambiado para la señal, desde su envío hasta su recepción. Para relacionar las coordenadas espacio-temporales respecto a observadores en movimiento relativo de un suceso impropio no podemos hacer uso de la transformación de Lorentz. Se debe resolver el problema aplicando la proporcionalidad de intervalos de tiempo y la constancia de la velocidad de la luz.

Problemas resueltos

4.11 Una antena emite ondas de radio con intervalos de tiempo T_1. Los impulsos son reflejados por un automóvil, y regresan a la antena con intervalos de tiempo T_2. Calcular la velocidad del automóvil, suponiendo que es constante.

- Nos fijamos en un determinada onda de radio que se emite entre los instantes $t=0$ y $t=T_1$. Si el primer frente de onda se refleja en el automóvil en el instante t cuando éste se encuentra a una distancia x de la antena, y el último frente de onda se refleja en el instante t' cuando el automóvil se encuentra a una distancia x' de la antena, entonces la velocidad del automóvil, supuesta constante, debe ser igual a la distancia recorrida entre las dos reflexiones, dividida por el tiempo transcurrido entre las dos reflexiones

$$V=\frac{x'-x}{t'-t}$$

- Según el principio de constancia de la velocidad de la luz, la onda se propaga con velocidad constante c. Entonces, la distancia de la antena al automóvil debe ser igual a la distancia recorrida por la onda desde su emisión hasta su reflexión. Obtenemos así la relación para el primer frente de onda

$$x=x_0+ct$$

y análogamente para el último frente de onda

$$x'=x_0+c\left(t'-T_1\right)$$

siendo x_0 la posición del automóvil en el instante inicial respecto al origen de coordenadas localizado en la antena.

- Además, ya que el movimiento de la onda es uniforme, debe tardar el mismo tiempo en llegar al automóvil que en volver a la antena después de la reflexión. Deducimos así el recorrido del primer frente de onda: se emite en $t=0$, se refleja en el tiempo t y regresa a la antena en el tiempo $2t$. Análogamente, el último frente de onda se emite en $t=T_1$, se refleja en el tiempo t' y regresa a la antena en el tiempo $T_1+2\left(t'-T_1\right)$, después de la reflexión. Con esto, el período T_2 con que recibe la antena la onda reflejada satisface

$$T_2=T_1+2\left(t'-T_1\right)-2t$$

con lo cual la diferencia de los tiempos de reflexión vale

$$t' - t = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

y de aquí, la distancia recorrida por el automóvil entre las reflexiones del primer y último frente de onda, es

$$x' - x = c\left(t' - T_1\right) - ct = c\left(t' - t\right) - cT_1 = c\frac{T_2 - T_1}{2}$$

- Por tanto, la velocidad del automóvil es

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = c\frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1}$$

Si el automóvil se aleja de la antena, $V > 0$, entonces $T_2 > T_1$, y la señal se retrasa. Si el automóvil se acerca a la antena, $V < 0$, entonces $T_2 < T_1$, y la señal se adelanta.

4.7 Un reloj se mueve con velocidad V, respecto de un reloj en reposo. Se sincronizan ambos relojes en el instante inicial t=0, cuando el reloj en movimiento pasa por delante del reloj en reposo. En el instante t_1 se emite una señal desde el reloj en reposo, que llega al reloj en movimiento en un tiempo propio τ. Hallar la relación entre t_1 y τ, y el instante t_2 en el que la onda reflejada por el reloj en movimiento llega al reloj en reposo.

- La onda se envía en el instante t_1, se refleja en el instante t (instante τ en el reloj en movimiento), y llega de nuevo al reloj en reposo en el instante t_2. Como el movimiento entre los relojes es uniforme, existe una proporcionalidad entre los intervalos de tiempo para los dos relojes. Y ya que los relojes están sincronizados en el instante inicial, la proporcionalidad se establece entre los distintos instantes de tiempo. Se satisface

$$t = Kt_1$$

$$t_2 = Kt$$

con lo cual, la constante de proporcionalidad K resulta ser

$$K = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}$$

- Estudiamos ahora la relación entre el tiempo de emisión t_1, el tiempo de reflexión t, y el tiempo de recepción t_2. En virtud del carácter uniforme del movimiento relativo, y de la constancia de la velocidad de la luz, el tiempo de reflexión es el tiempo medio entre la emisión y la recepción

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

Por otro lado, para que se produzca la reflexión en el instante determinado t, es necesario que la distancia recorrida por la señal desde el reloj en reposo sea igual a la distancia recorrida por el reloj en movimiento desde el instante inicial. Esto es

$$Vt = c\left(t - t_1\right)$$

con lo cual

$$t_1 = \left(1 - \frac{V}{c}\right)t$$

De forma análoga, obtenemos la relación entre el instante de reflexión y el instante de recepción

$$t_2 = \left(1 + \frac{V}{c}\right)t$$

- Una vez determinada la relación entre los tiempos de emisión, reflexión y recepción, la constante de proporcionalidad K resulta ser

$$\boxed{K = \sqrt{\frac{c+V}{c-V}} > 1}$$

De aquí, obtenemos el valor desconocido del instante de recepción en la forma

$$t_2 = K^2 t_1 = \frac{c+V}{c-V} t_1$$

- Si el reloj en movimiento se acercara al reloj en reposo, la constante de proporcionalidad sería, con el cambio de V por $-V$

$$\boxed{K' = \sqrt{\frac{c-V}{c+V}} = \frac{1}{K}}$$

y la relación de tiempos quedaría

$$t = K' t_1$$
$$t_2 = K' t$$

4.8 Una estrella se aleja de la Tierra con velocidad V. Emite una radiación con longitud de onda l_0 medida en su sistema de referencia. Calcular la longitud de onda l de la radiación recibida en el sistema de referencia de la Tierra, y su aproximación en el caso no relativista $V \ll c$.

- Sea T_0 el período de la radiación emitida, medido en el sistema de referencia de la estrella. El período de la radiación que incide en la Tierra se obtiene de la proporcionalidad de intervalos de tiempo medidos en los dos sistemas. Si t_1 es el instante de la emisión del primer pulso de onda, medido en el sistema de referencia de la estrella, este pulso llega a la Tierra en el instante terrestre

$$t_1 = Kt_1 = \sqrt{\frac{c+V}{c-V}}t_1$$

Si t_2 es el instante de emisión del último pulso de onda, medido en el sistema de referencia de la estrella, este pulso llega a la Tierra en el instante terrestre

$$t_2 = Kt_2 = \sqrt{\frac{c+V}{c-V}}t_2$$

Por tanto, la relación entre los períodos de la radiación emitida por la estrella y recibida en la Tierra es

$$T = t_2 - t_1 = K\left(t_2 - t_1\right) = KT_0 = \sqrt{\frac{c+V}{c-V}}T_0$$

- Introduciendo la longitud de onda de la radiación $l = cT$, y en virtud que la velocidad de la luz no depende del estado de movimiento del observador, obtenemos la relación entre las longitudes de onda

$$\boxed{l = \sqrt{\frac{c+V}{c-V}}\, l_0}$$

Es el **efecto Doppler relativista**. Cuando la estrella se aleja de la Tierra, $V > 0$, $l > l_0$, la radiación recibida en la Tierra sufre un corrimiento del espectro hacia el rojo (longitudes de onda mayores). Si la estrella se acerca a la Tierra, $V < 0$, $l < l_0$, la radiación recibida en la Tierra sufre un corrimiento del espectro hacia el azul (longitudes de onda menores).

- Cuando la velocidad de la estrella es mucho menor que la velocidad de la luz, podemos hacer la aproximación

$$\left(1+\frac{V}{c}\right)^{1/2} \sim 1+\frac{V}{2c}$$

$$\left(1-\frac{V}{c}\right)^{-1/2} \sim 1+\frac{V}{2c}$$

con lo cual

$$l = \sqrt{\frac{c+V}{c-V}}\, l_0 \sim \left(1+\frac{V}{2c}\right)^2 l_0 \sim \left(1+\frac{V}{c}\right) l_0$$

y tenemos el efecto Doppler no relativista, estudiado en la primera parte de este capítulo.

4.9 Un reloj se mueve con velocidad *V*, respecto de un reloj en reposo. Se sincronizan ambos relojes en el instante inicial t=0. Calcular el tiempo τ que indica el reloj en movimiento, si el reloj en reposo indica un tiempo t.

- Para relacionar los tiempos medidos en los dos sistemas de referencia podemos utilizar cualquier suceso relativista, que nos permita utilizar el principio de proporcionalidad de intervalos y la constancia de la velocidad de la luz. Supongamos que enviamos una señal luminosa desde el reloj en reposo en el instante t_1 hacia el reloj en movimiento. La señal se ve reflejada en el instante t para el reloj en reposo, y en el instante τ para el reloj en movimiento. La señal reflejada llega de nuevo al reloj en reposo en el instante t_2**.** Por tanto, nuestro suceso relativista será la llegada de la señal al reloj en movimiento.

- Como el reloj en movimiento se mueve con velocidad constante respecto del reloj en reposo, debe existir una proporcionalidad entre los intervalos de tiempo medidos por el reloj en movimiento y los intervalos de tiempo medidos por el reloj en reposo. Es decir, si el reloj en reposo envía una señal de período T, el reloj en movimiento recibe la señal con período *KT,* medido en su sistema de referencia. Aplicamos este concepto a la emisión de la onda en el instante t_1. Por tanto, para el reloj en reposo la onda se emitió en el intervalo de tiempo entre $t=0$ y $t=t_1$. Por la proporcionalidad de intervalos, la señal debe recibirse por el reloj en movimiento en el intervalo de tiempo entre $t=0$ y $t=Kt_1$. Como los relojes están sincronizados en el tiempo inicial, la proporcionalidad de intervalos equivale a la proporcionalidad entre los instantes de emisión por parte del reloj en reposo y recepción por parte del reloj en movimiento. Es decir, la señal se emite por el reloj en reposo en el instante t_1, y se recibe por el reloj en movimiento en su instante $t=Kt_1$. De forma análoga, la señal se refleja en el reloj en movimiento en el instante t , y se recibe de vuelta en el reloj en reposo en su instante $t_2=Kt$. Por tanto, la relación entre los tiempos de emisión, reflexión y recepción es

$$t=Kt_1$$
$$t_2=Kt$$

con lo cual

$$t=\sqrt{t_1t_2}$$

Este último resultado puede compararse con el tiempo de la reflexión medido por el reloj en reposo

$$t=\frac{t_1+t_2}{2}$$

- Como ya vimos en el problema **4.7,** los tiempos t_1, t_2 en función del tiempo t medido por el reloj en reposo son

$$t_1 = \left(1 - \frac{V}{c}\right)t$$

$$t_2 = \left(1 + \frac{V}{c}\right)t$$

Entonces, la relación entre los tiempos medidos por ambos relojes es

$$t = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\,t$$

e introduciendo el factor γ, obtenemos el resultado final

$$\boxed{t = \frac{1}{g}t < t}$$

Hemos comprobado que el tiempo medido por el reloj en movimiento es menor que el tiempo medido por el reloj en reposo. Existe una **dilatación del tiempo** para un observador en movimiento, respecto a un observador en reposo.

4.10 Una barra de longitud L_0 en su sistema de referencia, se mueve con velocidad V en la dirección de su eje, respecto a un reloj en reposo. Cuando su extremo trasero A pasa por el reloj en reposo, éste emite una señal luminosa hacia un espejo fijado en el extremo delantero B. La señal se refleja, recorre de nuevo la barra y vuelve al reloj en reposo. Calcular el instante T de recepción de la onda luminosa según el reloj en reposo, y de aquí obtener la longitud de la barra en el sistema en reposo.

- En el sistema de referencia fijado a la barra, la señal luminosa tarda un tiempo τ en regresar al punto de partida A, dado por

$$t = \frac{2L_0}{c}$$

De la proporcionalidad entre los intervalos de tiempo medidos en ambos sistemas, si parte del punto A en el instante τ, el instante de recepción en el sistema en reposo es

$$T = Kt = \sqrt{\frac{c+V}{c-V}}\frac{2L_0}{c}$$

- Sea L la longitud de la barra medida en el sistema en reposo. La distancia d recorrida por la señal luminosa en el sistema en reposo es

$$d = cT$$

y debe ser igual al doble de la longitud de la barra, $2L$, más la distancia desde el extremo A al reloj en reposo VT, en el momento T. Por tanto,

$$d = 2L + VT$$

De estas dos ecuaciones, despejamos la longitud de la barra en el sistema en reposo

$$L = \frac{1}{2}(c - V)T$$

Introduciendo el valor de T y el factor γ obtenemos

$$L = \frac{1}{2}(c-V)\frac{2L_0}{c}\sqrt{\frac{c+V}{c-V}} = \frac{1}{g}L_0 < L_0$$

La longitud de un cuerpo en movimiento medida en un sistema en reposo es menor que la longitud real, medida en el sistema de referencia ligado al cuerpo. Existe una contracción de la longitud debida al movimiento de un cuerpo.

4.11 La luz de una señal procedente del centro de una barra en reposo de longitud L_0, alcanza sus extremos simultáneamente. Calcular el tiempo, medido en un reloj en reposo, si la barra se mueve con velocidad V según su eje.

- Sea L la longitud de la barra en el sistema en reposo. La distancia entre la señal luminosa emitida y el extremo izquierdo de la barra disminuye una distancia $c+V$ en cada segundo. El tiempo que tarda en llegar al extremo izquierdo es

$$t_{iz} = \frac{L}{2(c+V)}$$

desde el momento del destello. La distancia entre la señal emitida y el extremo derecho de la barra, disminuye $c-V$ en cada segundo. El tiempo que tarda en llegar al extremo derecho es

$$t_d = \frac{L}{2(c-V)}$$

El tiempo de retraso es (la señal alcanza el extremo izquierdo antes)

$$\Delta t = t_d - t_{iz} = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{c-V} - \frac{1}{c+V}\right) = \frac{LV}{c^2 - V^2}$$

- Debido a la contracción de la longitud, para el sistema en movimiento, la longitud de la barra es

$$L = \frac{1}{g}L_0$$

con lo cual, el retraso temporal en la recepción de la onda luminosa es

$$\Delta t = \frac{1}{g}\frac{L_0 V}{c^2 - V^2} \neq 0$$

La conclusión es que la simultaneidad de sucesos tiene carácter relativo, y depende del sistema de referencia.

4.12 Dos astronaves viajan con velocidad relativa V. Pasado un tiempo t desde el encuentro de las dos naves, una de ellas A descubre que un asteroide se encuentra a una distancia x. Calcular las coordenadas t' y x' del asteroide, medidas por la otra nave B.

- Para detectar el asteroide, ambas naves deben emitir señales luminosas que se reflejen en el asteroide y regresen a cada nave. Sea t_1 el tiempo de la emisión por la nave A, t' el tiempo de reflexión por el asteroide y x la distancia entre la nave A y el asteroide en el momento de la reflexión. Sea t_1' el tiempo de recepción por la nave B de la señal enviada por la nave A en el instante t_1, t' el tiempo de reflexión de la señal por el asteroide según la nave B y x' la distancia entre la nave B y el asteroide en el momento de la reflexión. Se cumple

$$x' = c\left(t_1' - t'\right)$$

para la nave B, y

$$x = c\left(t_1 - t\right)$$

para la nave A. Por la proporcionalidad de los tiempos medidos por A y por B, obtenemos la relación entre los instantes de emisión por la nave A y de recepción por la nave B

$$t_1' = Kt_1$$

con lo cual

$$t_1' = \sqrt{\frac{c+V}{c-V}}t_1 = \sqrt{\frac{c+V}{c-V}}\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

- Después de reflejarse en el asteroide, la señal vuelve a cada nave en los tiempos

$$t_2 = t + \frac{x}{c}$$

$$t_2' = t' + \frac{x'}{c}$$

Ahora se satisface la relación inversa de tiempos

$$t_2 = Kt_2'$$

con lo cual

$$t_2' = \sqrt{\frac{c-V}{c+V}}t_2 = \sqrt{\frac{c-V}{c+V}}\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

- Ya que la velocidad de la luz es constante en todo el proceso, el tiempo y posición del asteroide según la nave A satisfacen

$$t' = \frac{t_1' + t_2'}{2}$$

$$x' = c\frac{t_2' - t_1'}{2}$$

De aquí obtenemos la ley de **transformación de Lorentz**, para el paso de coordenadas de espacio-tiempo entre dos sistemas inerciales que se mueven con velocidad relativa V. Para la variable temporal escribimos

$$\boxed{t' = g\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)}$$

donde hemos introducido el factor γ definido por

$$g = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

y para la variable espacial

$$\boxed{x' = g\left(x - Vt\right)}$$

4.13 Una astronave A parte de la Tierra con una velocidad V en el instante que sus relojes y los de la Tierra señalan el valor cero. Al cabo de un tiempo T según los relojes de la Tierra, parte una segunda nave B a una velocidad U. Suponiendo que U es mayor que V, determinar el instante respecto de los relojes de la Tierra en el que la segunda astronave alcanza a la primera. Determinar el instante en el que B alcanza a A medido por la Tierra, el instante en que partió la nave B de la Tierra, según el reloj en A, el instante en que B alcanza a A, según los relojes de A, y la distancia a la que se encontraba A de la Tierra cuando partió B, en el sistema de referencia de A. Deducir entonces la velocidad de B medida en A.

- Las dos naves se mueven con velocidad uniforme respecto a la Tierra. Entonces, respecto a la Tierra, la nave B alcanza a la nave A cuando las distancias recorridas por ambas naves respecto de la Tierra sean iguales. El tiempo de vuelo de A será t a una velocidad V y el tiempo de vuelo de B será $t - T$ a una velocidad U. Por tanto,

$$U\left(t - T\right) = Vt$$

de donde obtenemos

$$t = \frac{UT}{U - V}$$

- Tomamos un sistema de referencia S fijo en la Tierra, y un sistema S' móvil, fijo en A, que se mueve respecto de la Tierra con velocidad V. La transformación de Lorentz que liga las coordenadas espacio-temporales de ambos sistemas es

$$t' = g\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)$$

y

$$x' = g\left(x - Vt\right)$$

- En t=0, los relojes de la Tierra y de A están sincronizados. Entonces, si el reloj de la Tierra marca un tiempo T, y la posición de la Tierra en su sistema de referencia es x=0, el reloj en A marca el tiempo

$$t = g\left(T - \frac{V0}{c^2}\right) = gT$$

En el instante en que B alcanza a A, los relojes de la Tierra marcan el tiempo t, a una distancia de la Tierra Vt. Este suceso se produce respecto a A, en el instante dado por

$$t_1 = g\left(t - \frac{VVt}{c^2}\right) = g\,\frac{UT}{U-V}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$$

y los relojes de A marcan el tiempo (de nuevo x=0, en la Tierra),

$$t_1 = g\,t_1 = g\,UT\,\frac{1-\dfrac{V^2}{c^2}}{U-V}$$

• En el sistema de referencia de A, la distancia x' a la Tierra, cuando el reloj de la Tierra marca el tiempo t y el espacio x=0, está dada por la transformación de Lorentz

$$x' = -gVT$$

Por tanto, cuando sale B, (el tiempo t es T), la nave A dista de la Tierra una distancia D (en módulo) medida en A,

$$D = gVT$$

• De los dos resultados anteriores, vemos que respecto al sistema de referencia de A, la nave B tarda un tiempo $t_1 - t$ en alcanzarla, y debe recorrer una distancia D para ello. Por tanto, deducimos que la velocidad (uniforme) de B, medida por A es

$$W = \frac{D}{t_1 - t} = \frac{U-V}{1-\dfrac{VU}{c^2}}$$

que coincide con la fórmula relativista de adición de velocidades.

4.14 Dos naves viajan con velocidades opuestas sobre una estación espacial. Son testigos de dos acontecimientos A y B, que conforme a las observaciones de la nave 1, se producen durante el tiempo t, y conforme a las observaciones de la nave 2, durante el tiempo t pero en sentido inverso (primero B luego A). Calcular el tiempo y el lugar de los sucesos, según el sistema de referencia de la estación espacial y comprobar si A y B tienen relación de causalidad.

• Supongamos que en el sistema de referencia de la estación espacial, el suceso B tuvo lugar a una distancia x_0 del suceso A, después de un tiempo t_0. Para ello, utilizando la transformación de Lorentz entre la estación espacial y las dos naves, se debe cumplir

$$\text{nave 1: } t = g\left(t_0 - \frac{Vx_0}{c^2}\right)$$

$$\text{nave 2: } -t = g\left(t_0 + \frac{Vx_0}{c^2}\right)$$

De las dos ecuaciones anteriores despejamos el tiempo medido en el sistema de referencia de la estación espacial

$$t_0 = 0$$

y la posición del suceso B en este mismo sistema de referencia

$$x_0 = -\frac{ct^2}{gV}$$

En el sistema de referencia de la estación espacial, los dos sucesos ocurren simultáneamente en distintos puntos del espacio. No pueden por tanto tener una relación de causa-efecto. Son sucesos independientes.

4.15 Una astronave de longitud L_0 en su sistema de referencia, parte de la Tierra con velocidad V. Más tarde, se emite tras ella una señal luminosa que llega a la cola del cohete en el instante , según los relojes de la astronave y de la Tierra. Determinar cuándo llega la señal a la cabeza del cohete, según los relojes del mismo y según los relojes de la Tierra. La señal se refleja en la cabeza del cohete y se dirige a la cola del cohete. Determinar cuándo alcanza la cola del cohete según los relojes de la nave y de la Tierra.

- Respecto al sistema ligado al cohete, la distancia que debe recorrer para llegar a la cabeza es L_0, manteniéndose el cohete en reposo respecto a su propio sistema de coordenadas. El tiempo necesario es $t = \frac{L_0}{c}$. Además, después de reflejarse, el tiempo que tarda la señal en volver a la cola es el mismo τ.

- Respecto al sistema de la Tierra, el cohete tiene una longitud contraída $L = L_0 / g$. Cuando la señal se dirige hacia la cabeza del cohete su velocidad es c y la cabeza se aleja de la señal con velocidad V. Por tanto, la velocidad relativa entre la señal y la cabeza del cohete es $c - V$. El tiempo que tarda en llegar a la cabeza, medido por la Tierra, será

$$t_1 = \frac{L}{c - V} = \frac{L_0}{g\left(c - V\right)}$$

y de forma análoga para el viaje de la cabeza a la cola, la velocidad relativa es $c + V$, y el tiempo empleado es

$$t_2 = \frac{L}{c + V} = \frac{L_0}{g\left(c + V\right)}$$