Tema 4. Relatividad especial

Tercera parte: Dinámica relativista

1. Masa relativista

- La inercia de un cuerpo es consecuencia de su resistencia al cambio en su estado de movimiento, y se identifica usualmente con la masa. Clásicamente su valor depende de la cantidad de materia presente en el cuerpo.

- Sin embargo, cuando un cuerpo acelera uniformemente en su propio sistema de referencia, respecto a un observador exterior tendrá una aceleración no uniforme sino decreciente que evite que el cuerpo pueda alcanzar la velocidad de la luz. El observador exterior concluirá que la resistencia al cambio de movimiento crece al aumentar la velocidad. Por tanto, la relatividad lleva a la conclusión de que la inercia, o masa, crece con la velocidad, y depende tanto de la cantidad de materia presente como de su estado de movimiento. La masa de un cuerpo medida en su propio sistema de referencia en reposo se denomina **masa en reposo**, y su masa total o **masa relativista** cuando se mueve siempre es mayor que la masa en reposo. En particular, puede deducirse la expresión general

$$\boxed{m(V) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = g\, m_0}$$

siendo m_0 la masa en reposo.

- En la física clásica, el momento lineal se define como el producto de la masa y la velocidad. En relatividad, tal definición se mantiene, pero la masa debe definirse como masa relativista.

2. Leyes de conservación

- En la física clásica, las cantidades dinámicas más importantes son las que se conservan durante las interacciones. Por ejemplo, cuando dos cuerpos colisionan entre sí la masa total, energía y momento después de la colisión son iguales a sus valores antes de la colisión. El principio de relatividad demanda que las leyes de la física sean las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.

- La propiedad más importante del momento lineal en la mecánica clásica es su conservación en sistemas cerrados. Este resultado se deriva de las leyes de Newton en ausencia de fuerzas exteriores. En la mecánica relativista hemos visto que la masa total de un cuerpo en movimiento siempre es mayor que su masa en reposo. Definimos por tanto el momento relativista en la forma

$$\boxed{p = m(V)V = g\, m_0 V}$$

e imponemos como principio la conservación del momento relativista de un sistema cerrado en todos los sistemas inerciales de referencia.

- El trabajo realizado sobre un cuerpo es igual al producto de la fuerza aplicada por la distancia recorrida en la dirección de la fuerza. Si la inercia de un cuerpo aumenta con la velocidad esto implica que la fuerza que aplicamos produce una aceleración decreciente. Ya que el trabajo realizado no varía significativamente la velocidad del cuerpo, se transforma en una energía interna que almacena el cuerpo. La conclusión es que la energía y la masa se deben reinterpretar de forma conjunta en relatividad. En particular, se satisface la relación de Einstein entre la energía total de un cuerpo y su masa relativista

$$\boxed{E = m(V)c^2 = g\, m_0 c^2}$$

y esta es la expresión que tomaremos para definir la energía relativista de un cuerpo. Además imponemos como principio la conservación de la energía relativista en un sistema cerrado en todos los sistemas inerciales de referencia.

- La relación entre el momento lineal relativista de un cuerpo y su energía total que generaliza la expresión no relativista es

$$\boxed{E = \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4}}$$

que se queda reducida en el caso de una masa en reposo nula, en el caso de los fotones,

$$\boxed{E = cp}$$

- En la física clásica la energía cinética es una cantidad significativa que tiene una fórmula simple. La fórmula newtoniana es sólo una aproximación a la energía cinética relativista. En relatividad, la energía cinética se define como la diferencia entre la energía total de un cuerpo y su energía en reposo, en ausencia de movimiento. Por tanto, la energía cinética es la energía adquirida por el cuerpo debido a su movimiento. Tiene la expresión

$$\boxed{K = E - E_0 = (g - 1)\, m_0 c^2}$$

- Por último, las unidades de medida en relatividad son diferentes que en la física clásica, principalmente debido al cambio de magnitud de las cantidades físicas. La energía se mide en MeV y el momento lineal en MeV/c

Problemas Resueltos

4.16 Una partícula de masa en reposo m, es alcanzada por un fotón de energía Q, que queda absorbido. Calcular la velocidad final del cuerpo compuesto, si la partícula inicialmente estaba en reposo.

- Por conservación de la energía relativista

$$E = mc^2 + Q$$

siendo E la energía del cuerpo compuesto, después de la absorción del fotón. El fotón no tiene masa en reposo, por lo que la expresión de su energía relativista es

$$Q = cp$$

siendo p el momento lineal del fotón.

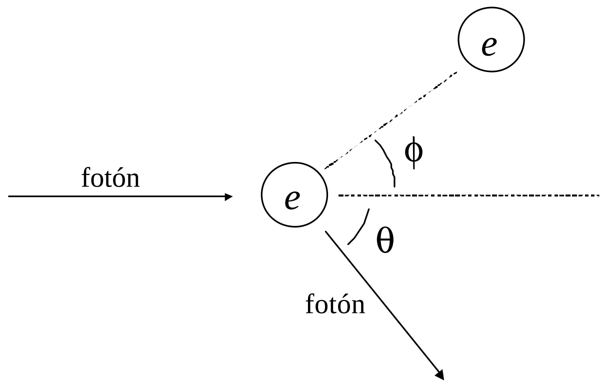
- Por conservación del momento lineal, p será el momento del cuerpo compuesto. Por tanto, el cuerpo compuesto tiene momento lineal p y energía E. La velocidad viene dada por la expresión

$$V = \frac{c^2 p}{E}$$

con lo cual

$$V = \frac{Q}{Q + mc^2} c$$

4.17 Un fotón de energía Q choca con un electrón en reposo, el cual retrocede según la dirección dada por el ángulo ϕ. El fotón se dispersa según la dirección dada por el ángulo θ. Calcular la energía final del fotón y su longitud de onda.



- Por conservación del momento lineal, en la dirección del fotón incidente

$$\frac{Q}{c} = \frac{Q'}{c} \cos\phi + p \cos\theta$$

siendo Q la energía del fotón incidente, Q' la energía del fotón emergente, y p el momento del electrón después de la colisión. La conservación del momento en la dirección perpendicular a la dirección del fotón incidente se escribe

$$0 = \frac{Q'}{c}\,\mathrm{sen}\,f - p\,\mathrm{sen}\,q$$

- La conservación de la energía relativista es

$$Q + mc^2 = Q' + E$$

siendo m la masa en reposo del electrón y E su energía final, que se relaciona con su momento final p a través de

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + \left(mc^2\right)^2}$$

- Primero eliminamos E. Escribimos la ecuación de conservación de la energía en la forma

$$\left(Q + mc^2 - Q'\right)^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

Después eliminamos el ángulo θ. Para ello, escribimos las ecuaciones de conservación del momento en la forma

$$cp\cos q = Q - Q'\cos f$$

$$cp\,\mathrm{sen}\,q = Q'\,\mathrm{sen}\,f$$

elevamos al cuadrado y sumamos resultando

$$c^2 p^2 = Q^2 + Q'^2 - 2QQ'\cos f$$

- Por último, eliminamos p. De la última ecuación y de la conservación de la energía, obtenemos

$$\left(Q + mc^2 - Q'\right)^2 = Q^2 + Q'^2 - 2QQ'\cos f + m^2 c^4$$

Desarrollando el lado izquierdo

$$\left(Q - Q'\right)mc^2 = -QQ'\cos f$$

Despejando Q', la energía final del fotón, obtenemos

$$\boxed{\frac{1}{Q'} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{mc^2}\left(1 - \cos q\right)}$$

- De la relación entre la longitud de onda del fotón y su energía

$$Q = hn = h\frac{c}{l}$$

obtenemos la relación entre las longitudes de onda del fotón incidente y del fotón emergente

$$\boxed{l' = l + \frac{h}{mc^2}\left(1 - \cos q\right)}$$

La colisión elástica entre un electrón y un fotón, tal como se ha desarrollado aquí, se conoce como **efecto Compton**, y la longitud de onda característica

$$\boxed{l_c = \frac{h}{mc^2}}$$

se conoce como la longitud de onda de Compton.

4.18 Calcular la energía umbral del proceso

$$P_1 + P_2 \to P + N + p^+$$

en el que un protón P_1 incide sobre otro protón en reposo P_2 y se produce en la colisión un protón P, un neutrón N y un pión p^+. Las masas en reposo son

$$m(p)c^2 = 140\, MeV$$

$$m(P)c^2 = m(N)c^2 = 938\, MeV$$

- La energía umbral es la energía cinética del protón incidente tal que las partículas finales tienen energía mínima. Tomemos inicialmente el sistema de referencia en el que el sistema de los dos protones iniciales tiene momento nulo. En este sistema P_1 y P_2 poseen un momento lineal del mismo módulo y de signo contrario y la misma energía. En este sistema, el proceso umbral corresponde a una velocidad nula de las partículas finales P, N, p^+. Si V es la velocidad de los protones iniciales en este sistema, por conservación de la energía, se debe satisfacer

$$\frac{2m(P)c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = m(P)c^2 + m(N)c^2 + m(p)c^2$$

de donde obtenemos la velocidad V de los protones en el sistema de momento total nulo, que satisface

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{m(p)}{m(P)}$$

- Para calcular la velocidad de P_1 en el sistema del laboratorio, donde P_2 posee una velocidad nula, vemos que según el teorema de adición relativista de velocidades

$$0 = V(P_2) = \frac{U - V}{1 + \frac{UV}{c^2}}$$

la velocidad U relativa entre ambos sistemas es igual a V. Con esto, la velocidad de P_1 respecto al sistema del laboratorio es

$$V(P_1) = \frac{V+V}{1+\frac{V^2}{c^2}} = \frac{2V}{1+\frac{V^2}{c^2}}$$

- La energía cinética umbral será

$$K_u = E(P_1) - m(P)c^2$$

resultando

$$K_u = m(P)c^2\left[\left(\sqrt{1-\frac{V^2(P_1)}{c^2}}\right)^{-1} - 1\right]$$

Desarrollando el radicando, obtenemos

$$1-\frac{V(P_1)^2}{c^2} = 1-\frac{4V^2c^2}{\left(c^2+V^2\right)^2} = \frac{\left(c^2-V^2\right)^2}{\left(c^2+V^2\right)^2}$$

con lo cual,

$$\left(\sqrt{1-\frac{V(P_1)^2}{c^2}}\right)^{-1} - 1 = \frac{c^2+V^2}{c^2-V^2} - 1 = \frac{2V^2}{c^2-V^2}$$

y

$$K_u = m(P)c^2\frac{2V^2}{c^2-V^2}$$

- Introduciendo el valor de V obtenido anteriormente,

$$\frac{V^2}{c^2} = 1-\left(\frac{2m(P)}{2m(P)+m(p)}\right)^2 = \frac{m(p)\left(m(p)+4m(P)\right)}{\left(2m(P)+m(p)\right)^2}$$

con lo cual,

$$\frac{2V^2}{c^2-V^2} = \frac{m(p)}{m(P)}\left(2+\frac{m(p)}{2m(P)}\right)$$

y la energía umbral queda definitivamente

$$K_u = m(P)c^2\frac{m(p)}{m(P)}\left(2+\frac{m(p)}{2m(P)}\right) = \left(2+\frac{m(p)}{2m(P)}\right)m(p)c^2$$

4.19 Una partícula de masa en reposo m, incide con energía E sobre otra partícula idéntica en reposo. Las dos partículas se separan con energías iguales. Calcular el ángulo que forman sus direcciones con la dirección inicial.

- Por conservación del impulso y de la energía relativista, el ángulo θ formado con la dirección inicial es el mismo para las dos partículas, si bien se desplazan por ambos lados respecto de la dirección inicial. De aquí,

$$p = 2p'\cos q$$

$$E + mc^2 = 2E'$$

siendo E' y p' la energía y el impulso de una de las partículas finales. Con la definición de energía relativista

$$E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$$

$$E'^2 = m^2c^4 + c^2p'^2$$

obtenemos, a partir de las ecuaciones de conservación

$$E^2 = m^2c^4 + c^2\left(2p'\cos\theta\right)^2$$

junto con

$$c^2\left(2p'\cos\theta\right)^2 = 4c^2p'^2\cos^2\theta = \cos^2\theta\left(4E'^2 - 4m^2c^4\right)$$

- El último factor lo desarrollamos de la siguiente forma

$$4E'^2 - 4m^2c^4 = \left(2E' + 2mc^2\right)\left(2E' - 2mc^2\right) = \left(E + 3mc^2\right)\left(E - mc^2\right)$$

con lo cual el ángulo de dispersión satisface

$$E^2 = m^2c^4 + \cos^2\theta\left(E + 3mc^2\right)\left(E - mc^2\right)$$

Simplificando obtenemos

$$\cos^2\theta = \frac{E + mc^2}{E + 3mc^2}$$

Problemas Propuestos

4.20 **Una partícula en reposo, con masa en reposo m, emite un fotón de energía Q. Calcular la masa en reposo de la partícula después de la emisión.**

Solución: $M = \sqrt{m\left(m - 2\dfrac{Q}{c^2}\right)}$

4.21 **Una partícula con masa en reposo m y energía cinética $2mc^2$, choca con una partícula en reposo de masa $2m$, y se adhiere a ella. Calcular la masa en reposo de la partícula compuesta.**

Solución: $M = \sqrt{17}m$

4.22 **Calcular la energía cinética umbral del proceso**

$$P_1 + P_2 \rightarrow P_1 + P_2 + P_3 + \overline{P}$$

en el que un protón P_1 incide sobre otro protón en reposo P_2 y se produce un protón P_3 y un antiprotón $\overline{P}$. Las masas en reposo son

$$m\left(P\right)c^2 = m\left(\overline{P}\right)c^2 = 938\,MeV$$

Solución: $K_u = 6m\left(P\right)c^2$

4.23 Una partícula de masa en reposo m, se desintegra en dos partículas con masas en reposo m_1 y m_2. Calcular las energías de las partículas emitidas.

Solución:
$$E_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m}$$
$$E_2 = \frac{m^2 + m_2^2 - m_1^2}{2m}$$

4.24 El mesón K^0 se desintegra formando piones cargados con masas en reposo idénticas, según el proceso $K^0 \to p^+ + p^-$. Las masas en reposo son

$$m\left(K^0\right)c^2 = 497.7\ MeV$$

$$m\left(p\right)c^2 = 139.6\ MeV$$

Determinar la velocidad de los piones resultantes en la desintegración de un mesón en reposo.

Solución: $V = \sqrt{1 - 4\dfrac{m\left(p\right)^2}{m\left(K^0\right)^2}}\ c \simeq 0.83\,c$