Problemas Resueltos

2.20 Un satélite describe una órbita circular en torno a la Tierra. Si se cambia de repente la dirección de su velocidad, pero no su módulo, estudiar el cambio en su órbita y en su período.

- Al cambiar sólo la dirección de la velocidad, el momento angular varía pero la energía total no. La órbita nueva corresponderá a una trayectoria asociada a una energía negativa, que como hemos visto, puede ser una órbita circular o elíptica. El nuevo valor del momento angular es

$$L' = mVr_0 \sin\alpha = L\sin\alpha$$

siendo α el ángulo entre la velocidad y el radio vector en el instante del cambio, y r_0 el radio de la órbita circular, y la energía tiene el valor

$$E' = E = -\frac{GMm}{2r_0}$$

La fuerza central que actúa entre al satélite y la Tierra es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Para dicha fuerza se satisfacen las leyes de Kepler. La tercera ley nos dice que el período de una órbita sólo está relacionado con la energía total, de la forma siguiente

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

y

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

donde a es el semieje mayor de la nueva órbita, que en este caso coincide con r_0. Es decir,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\left(\frac{GMm}{-2E}\right)^3$$

Al no variar la energía durante el cambio de la velocidad, no varía el período orbital.

- La segunda ley de Kepler es la ley de las áreas y establece que

$$\frac{L}{2m} = \frac{S}{T}$$

siendo S el área de la órbita y T el período orbital. Como el período no varía, $T = T'$,

$$\frac{2mS}{L} = \frac{2mS'}{L'}$$

con lo cual, el área de la nueva órbita es

$$S' = \frac{L'}{L}S = S\sin\alpha$$

Ya que la energía no varía, la nueva órbita es una elipse centrada en O, con semieje $a = r_0$, y nos falta calcular su excentricidad. Tenemos

$$S = pr_0^2 = pa^2$$

y

$$S' = pab = pa^2\sqrt{1-e^2}$$

con lo cual

$$\sin a = \frac{S'}{S} = \sqrt{1-e^2}$$

Es decir, la excentricidad de la nueva órbita viene dada por

$$e = \cos a$$

2.21 Un satélite de masa m describe una órbita circular a una distancia H de la superficie terrestre. Otra partícula de masa $m/2$ se mueve sobre la misma órbita pero en sentido contrario, de modo que choca con el satélite quedando unida a él. Calcular el apogeo y el perigeo de la órbita del cuerpo compuesto.

- La velocidad de una masa m en una órbita circular de radio r puede obtenerse de la condición de equilibrio de las fuerzas en dirección radial

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{V^2}{r}$$

ó

$$V = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

La velocidad no depende de la masa en movimiento. Concluimos que la velocidad del satélite y de la partícula antes del choque tiene el mismo módulo y sentido contrario con el valor

$$V_i = \sqrt{\frac{GM}{R+H}}$$

siendo R el radio de la Tierra y M su masa. Durante el choque sólo actúan fuerzas interiores, y el momento angular respecto a O se conserva constante. Antes del choque

$$L = mV_i(R+H) - \frac{m}{2}V_i(R+H) = \frac{m}{2}\sqrt{GM(R+H)}$$

Este es el valor del momento angular para el movimiento del cuerpo compuesto, después del choque.

- Para determinar los puntos apsidales de la nueva órbita nos falta conocer la energía del cuerpo compuesto. Como la colisión no es elástica, la energía no se conserva en la colisión. Sin embargo, si se conserva la velocidad del centro de masas, que corresponde a la velocidad V del cuerpo compuesto después del choque. Tenemos

$$\left(m+\frac{m}{2}\right)V = mV_i - \frac{m}{2}V_i$$

con lo cual

$$V = \frac{1}{3}V_i$$

Justo después de la colisión, el cuerpo compuesto lleva una velocidad V y se encuentra a una distancia R+H del centro de la Tierra. Por tanto, su energía total tiene el valor

$$E = \frac{1}{2}\left(m+\frac{m}{2}\right)V^2 - \frac{GM}{R+H}\left(m+\frac{m}{2}\right)$$

Introduciendo el valor de la velocidad, llegamos a

$$E = \frac{3}{4}m\frac{1}{9}\frac{GM}{R+H} - \frac{3}{2}m\frac{GM}{R+H} = -\frac{17}{12}\frac{GMm}{R+H}$$

- Una vez conocidos los valores L y E, hallamos los parámetros de la órbita a y e, del cuerpo compuesto. Para el semieje mayor obtenemos el valor

$$-\frac{17}{12}\frac{GMm}{R+H} = -\frac{3}{2}\frac{GMm}{2a}$$

$$a = \frac{9}{17}(R+H)$$

La excentricidad de la órbita satisface la fórmula

$$e = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2\left(\frac{3}{2}m\right)^3}}$$

Desarrollando el radicando

$$\frac{16EL^2}{27G^2M^2m^3} = -\frac{16}{27}\frac{17}{12}\frac{1}{4} = -\frac{17}{81}$$

encontramos

$$e = \sqrt{1-\frac{17}{81}} = \frac{8}{9}$$

- La distancia de máximo acercamiento, perigeo, está dada por

$$r_P = a(1-e) = \frac{9}{17}\left(1-\frac{8}{9}\right)(R+H) = \frac{1}{17}(R+H)$$

y la distancia de máximo alejamiento, apogeo, es

$$r_A = a(1+e) = \frac{9}{17}\left(1+\frac{8}{9}\right)(R+H) = R+H$$

2.22 Un satélite artificial de masa m recorre una órbita elíptica, con período T. Las velocidades máxima y mínima en su órbita son $V_{\max}, V_{\min}$ respectivamente. Determinar los parámetros de la órbita.

- La ecuación de la elipse es

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$$

Las distancias al apogeo y perigeo son

$$r_P = a(1-e)$$

$$r_A = a(1+e)$$

Por conservación del momento angular L en los puntos apsidales

$$mV_{\min} r_A = mV_{\max} r_P$$

con lo cual, de las ecuaciones anteriores, eliminando el semieje mayor a obtenemos la excentricidad de la órbita

$$e = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{V_{\max} + V_{\min}}$$

- Para hallar el semieje mayor, utilizamos la ley de las áreas. Si T es el período, pab el área de la elipse, la ley de las áreas se escribe

$$\frac{pab}{T} = \frac{L}{2m} = \frac{1}{2} V_{\min} a(1+e)$$

Como $b = a\sqrt{1-e^2}$, despejamos el valor del semieje mayor

$$a = \frac{V_{\min} T}{2p} \frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}}$$

Tenemos

$$\frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{V_{\max}}{V_{\min}}}$$

Por tanto,

$$a = \frac{T}{2p}\sqrt{V_{\min} V_{\max}}$$

- Finalmente la energía total E se encuentra a partir de la expresión

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

obteniendo

$$E = -\frac{pGMm}{\sqrt{V_{\min} V_{\max}}}$$

2.23 Un planeta de masa M tiene un satélite de masa m, describiendo en torno a él una trayectoria circular de radio R, con período T. Súbitamente el satélite se para. Determinar el tiempo de caída del satélite sobre el planeta.

- La energía del satélite en su órbita circular es

$$E = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{GMm}{R}$$

Además, hay equilibrio de las fuerzas en dirección radial. La fuerza gravitatoria se compensa con la fuerza centrífuga

$$m\frac{V^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$$

con lo cual, la energía es

$$E = -\frac{GMm}{2R}$$

- Cuando el satélite se frena, su energía cinética se hace cero, y su energía se reduce a la energía potencial, con lo cual

$$E' = -\frac{GMm}{R} = 2E$$

Según la tercera ley de Kepler, existe la relación entre el período de una órbita y la energía del sistema

$$T^2(-E)^3 = \frac{p^2}{2} G^2 M^2 m^3$$

El período de la nueva órbita satisface

$$T' = \left(\frac{E}{E'}\right)^{3/2} T = \frac{T}{2\sqrt{2}}$$

- Cuando el satélite se frena, su velocidad se hace cero, y así el momento angular de la nueva órbita es cero. Esto quiere decir que la órbita del satélite pasará por el centro del planeta. El punto de máximo alejamiento se produce en el momento inicial, $r = R$, y el punto de máximo acercamiento es $r = 0$. Por tanto, el tiempo que tarda en caer es igual al tiempo que tarda en ir de $r = R$ a $r = 0$, es decir, el tiempo que tarda en ir del máximo alejamiento al máximo acercamiento, esto es, un semiperíodo. El tiempo de caída es, entonces

$$t = \frac{T'}{2} = \frac{T}{4\sqrt{2}}$$

Problemas Propuestos

2.24 **Un satélite artificial se lanza desde la superficie terrestre verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $U = a\sqrt{\frac{GM}{R}}$. En el momento en que se para, se le da una velocidad transversal $V = b\sqrt{\frac{GM}{R}}$. Hallar los parámetros de la órbita en función de α y β. Aquí, R es el radio terrestre.**

$$a = \frac{R}{2 - a^2 - b^2}$$

Solución:

$$e = \sqrt{1 - \frac{4\left(2 - a^2 - b^2\right)b^2}{\left(2 - a^2\right)^2}}$$

2.25 **Una nave espacial de masa m llega con una velocidad V_0 a las proximidades de la Luna siguiendo una trayectoria hiperbólica cuya asíntota está a una distancia b del centro de la Luna. Sea a la distancia de aproximación máxima de la nave al centro de la Luna. Calcular la velocidad necesaria V_0 para que $b = \frac{10}{3}R, a = 2R$, siendo R el radio de la Luna, y la velocidad en el punto de aproximación máxima en dicho caso. En el punto de máxima aproximación, la nave frena para describir una órbita circular de observación de radio a. Calcular la energía perdida por la nave.**

$$V_0 = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Solución: $V_P = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{GM}{R}}$

$$\Delta E = \frac{GMm}{2a}\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}$$